Leçon 204 : Connexité. Exemples et applications.

Développements :

Théorème de Hadamard Lévy, Simplicité $SO_3(\mathbb{R})$

Bibliographie :

Queffelec, Bernis, Pommellet, Dolecki, Rouvière, Berthelin, Gourdon, Rombaldi analyse matricielle.

Rapport du jury 2016 :

Le rôle clef de la connexité dans le passage du local au global doit être mis en évidence dans cette leçon : en calcul différentiel, voire pour les fonctions holomorphes. Il est important de présenter des résultats naturels dont la démonstration utilise la connexité. La stabilité par image continue, l'identification des connexes de $\mathbb{R}$ sont des résultats incontournables. On distinguera bien connexité et connexité par arcs (avec des exemples compris par le candidat), mais il est pertinent de présenter des situations où ces deux notions coïncident. A contrario, on pourra distinguer leur comportement par passage à l'adhérence. Des exemples issus d'autres champs (algèbre linéaire notamment) seront appréciés. Le choix des développements doit être pertinent, le préambule en fournit quelques exemples, même s'il fait aussi appel à des thèmes différents ; on peut ainsi suggérer le théorème de Runge.

Rapport du jury 2017 :

Le rôle clef de la connexité dans le passage du local au global doit être mis en évidence dans cette leçon : en calcul différentiel, voire pour les fonctions holomorphes. Il est important de présenter des résultats naturels dont la démonstration utilise la connexité. La stabilité par image continue, l'identification des connexes de $\mathbb{R}$ sont des résultats incontournables. On distinguera bien connexité et connexité par arcs (avec des exemples compris par le candidat), mais il est pertinent de présenter des situations où ces deux notions coïncident. A contrario, on pourra distinguer leur comportement par passage à l'adhérence. La notion de composantes connexes doit également trouver sa place dans cette leçon (pouvant être illustrée par des exemples matriciels). L'illustration géométrique de la connexité sera un point apprécié par le jury. Des exemples issus d'autres champs (algèbre linéaire notamment) seront valorisés. Le choix des développements doit être pertinent, même s'il fait aussi appel à des thèmes différents ; on peut ainsi suggérer le théorème de Runge.

Remarque 1. *(E, d) est un espace topologique, $A \subset E$ est muni de la topologie induite par celle de E.*

1 Différentes notions de connexité (Espaces connexes)

1.1 Connexité

Définition 2 (Queffelec p121)**.** *[Pommellet p71] Espace connexe.*

Exemple 3 (Queffelec p122)**.** *Un singleton est connexe.*

Remarque 4 (Queffelec p121)**.** *Une partie A de E est connexe si A est connexe pour la topologie induite. (Détailler)*

Exemple 5 (Dolecki p100)**.** *Un espace muni de la topologie discrète est connexe si et seulement si il ne contient qu'un élement. Tout espace de cardinalité plus grande que 1 admettant un point isolé n'est pas connexe. (à mettre ?)*

Exemple 6 (Pommellet p71)**.** $[0, 1]$ *est connexe.*

Exemple 7. *$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ n'est pas connexe de $\mathbb{R}$. $\mathbb{Q} =]-\infty, \sqrt{2}[\cup \mathbb{Q} \cap]\sqrt{2}, +\infty[\cap \mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas connexe.*

Proposition 8 (Queffelec p120)**.** *X est connexe si et seulement si toute application continue de X dans $\mathbb{Z}$ est constante.*

Exemple 9 (Queffelec p121)**.**

Proposition 10 (Queffelec p121)**.** *Lemme de passage des douanes.*

1.2 Stabilité de la notion

Proposition 11 (Queffelec p122,123)**.** *[Pommellet p72][Dolecki p103) Une union de connexes dont l'intersection est non vide est connexe.*

Contre exemple 12. *L'union de deux boules disjointes d'un evn n'est pas connexe.*

Contre exemple 13 (Pommellet p72)**.** *L'intersection de deux connexes n'est pas forcément connexe.*

Proposition 14. *Un convexe est connexe.*

Proposition 15. *Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Théorème 16 (Queffelec p123)**.** *Si X est connexe et $f : X \to Y$ est continue, alors $f(X)$ est connexe.*

Application 17 (Dolecki p101)**.** *Théorème des valeurs intermédiaires. Pour $f : X \to \mathbb{R}$ continue sur X connexe, $f(X)$ est un intervalle.*

Application 18 (Gourdon p47). *[Pommellet p41] $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.*

Contre exemple 19. *Faux pour l'image réciproque. Prendre $f : x \mapsto x^2$. Alors $f^{-1}([1,9]) = [-3,-1] \cup [1,3]$ n'est pas connexe.*

Proposition 20 (Queffelec p112). *L'union de parties connexes ayant deux à deux une intersection non vide est connexe. (ou la chaîne)*

Proposition 21 (Pommellet p72). *L'adhérence d'un connexe est connexe.*

Proposition 22 (Queffelec). *Si A est connexe et $A \subset B \subset \overline{A}$ alors B est connexe.*

Contre exemple 23 (Pommelletp 72). *Faux pour l'intérieur.*

Contre exemple 24. *$A = [-3,3] \times [-1,1]$ et $B = [-1,1] \times [-3,3]$, $A^c \cup B$ n'est pas connexe.*

Proposition 25. *Si X et Y sont connexes alors $X \times Y$ est connexe.*

Exemple 26. *Un produit de n segments est connexe dans $\mathbb{R}^n$.*

1.3 Composantes connexes

Remarque 27. *Lorsque l'espace topologique X considéré (ou une de ses parties) n'est pas a priori connexe, il est toujours possible de se ramener à des espaces connexes en considérant les composantes connexes de X.*

Définition 28 (Queffelec p128). *[Pommellet p72] Pour X un espace topologique et $x \in X$, la composante connexe de x est $C(x)$ est la réunion de tous les connexes contenant x. C'est la plus grande partie connexe de X contenant x.*

Proposition 29 (Queffelec p128). *La relation $x \simeq y$ si et seulement si $C(x) = C(y)$ est une relation d'équivalence sur X. Ses classes d'équivalence sont appelées les composantes connexes de X.*

Exemple 30. *L'hyperbole dans $\mathbb{R}^2$ d'équation $xy = 1$ a deux composantes connexe.*

Exemple 31 (Pommellet p73). *Composantes connexes d'un ouvert de $\mathbb{R}$ sont des intervalles ouverts.*

Exemple 32 (Pommellet p73). *Composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$. Ici ?*

Proposition 33 (Queffelec p128). *[Pommellet p72] Les composantes connexes de X sont fermées dans X, 2 à 2 disjointes. En particulier, elles partitionnent l'espace.*

Proposition 34 (Queffelec p128). *[Dolecki2 p119] Si X est l'union disjointes d'ouverts connexes non vides alors ce sont les composantes connexes de X.*

Contre exemple 35 (Dolecki p316). *$X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, les composantes ne sont pas ouvertes.*

Proposition 36 (Dolecki2 p119). *Si X est l'union dijsointe des F_i où les F_j sont des parties connexes fermées, avec J un ensemble fini, alors les F_j sont les composantes connexes de X.*

Contre exemple 37 (Dolecki p107). *Cas où J n'est pas fini. $\mathbb{R} = \cup\{x\}$.*

1.4 Connexité par arcs

Remarque 38. *La connexité par arcs est une notion plus faible de connexité mais généralement plus maniable (car plus analytique). Dans les faits, les deux notions coïncident souvent.*

Définition 39 (Queffelec p124). *[Pommellet p73] Connexité par arcs.*

Proposition 40. *Convexe implique étoilé implique connexe par arcs implique connexe.*

Exemple 41 (Pommellet p74). *La sphère unité est connexe par arcs.*

Exemple 42 (Pommellet p73). *[Queffelec p125] Une boule d'une evn est connexe, ou plus généralement un convexe d'un evn est connexe par arcs.*

Exemple 43 (Queffelec p125). *Si f est continue alors son épigraphe est connexe par arcs.*

Contre exemple 44 (Pommellet p73). *[Colmez p88][Queffelec p152] L'adhérence du graphe de $\sin(1/x)$ est connexe mais pas connexe par arcs.*

Proposition 45 (Queffelec p124). *Dans le cas où X est un ouvert d'un evn, X est connexe si et seulement si X est connexe par arcs.*

Proposition 46. *Si D est un ensemble dénombrable de $\mathbb{R}^n$,$n \geq 2$, alors $\mathbb{R}^n - D$ est connexe par arcs.*

Exemple 47. *L'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ ayant une coordonnée irrationnelle est connexe.*

2 Prolongement grâce à la connexité (Du local au global)

Remarque 48. *Cette section plus analytique est dédiée à quelques exemples où la notion de connexité intervient dans le passage du local au global.*

2.1 Analyse réelle

Remarque 49. *Les preuves partielles insistent sur l'argument de connexité.*

Proposition 50 (Queffelec p143)**.** *[Pomm p74] Si X est connexe et $f : X \to Y$ est localement constante (ie tout point a de X possède un voisinage V sur lequel f vaut $f(a)$) alors f est constante.*

Proposition 51 (Queffelec p143)**.** *Soit U ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable. Si pour tout $x \in U$, $df(x) = 0$, alors f est constante.*

Contre exemple 52 (Rpuvière)**.** *Si $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \arctan(x) + \arctan(1/x)$. Alors f est dérivable et $f' = 0$. Alors $f = \pi/2$ sur $]0, +\infty[$ et $f = -\pi/2$ sur $]-\infty, 0[$.*

Proposition 53 (Pomm p75)**.** *Soit $f \in C(I, \mathbb{R})$. f est injective si et seulement si f est strictement monotone.*

Proposition 54 (Gourdon)**.** *Théorème de Darboux.*

Théorème 55 (Berthelin)**.** *Thérorème de Cauchy Lipschitz.*

Théorème 56. *Hadamard Levy.*

Exemple 57. *$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x - \arctan(y), y - \arctan(x)/2)$ est un difféomorphisme global.*

Remarque 58 (Plan Beaulieu)**.** *[Gourdon p402] Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^∞ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors f est une fonction polynomiale.*

Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\phi^{(n)}(x) = 0$ alors ϕ est une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$.

Remarque 59 (Gourdon p46)**.** *Soit (E, d) un espace métrique compact et (u_n) une suite de E telle que $\lim d(u_{n+1}, u_n) = 0$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérences de u_n est connexe.*

2.2 Analyse complexe

Proposition 60 (Queffelec p143)**.** *[Pabion] L'indice est constant sur chaque composante connexe.*

Proposition 61 (Queffelec holo p102)**.** *Principe des zéros isolés.*

Corollaire 62 (Queffelec holo p103)**.** *Prolongement analytique.*

Exemple 63 (Queffelec holo p104)**.** *Transformée d'une Gaussienne.*

Application 64. *Principe du maximum.*

Application 65 (Queffelec holo p100)**.** *Théorème de Liouville.*

Application 66. *Théorème de d'Alembert Gauss.*

Application 67 (Bernis)**.** *Formule des compléments.*

Exemple 68. *Prolongement de la fonction Γ.*

3 Utilisation de la connexité en algèbre

Proposition 69 (Romb analyse numérique p45)**.** *$GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.*

$SL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. $SL_n(\mathbb{R})$ aussi.

$O_n(\mathbb{R})$ a exactement deux composantes connexes.

$SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

$GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes.

Application 70. *$SO_3(\mathbb{R})$ est simple.*

Proposition 71. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On a $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A] \cup GL_n(\mathbb{C})$ où $\mathbb{C}[A]$ désigne l'algèbre des polynômes en A.*

Application 72. *L'image de $M_n(\mathbb{R})$ par l'application $\exp$ est $\{A^2, A \in GL_n(\mathbb{R})\}$.*